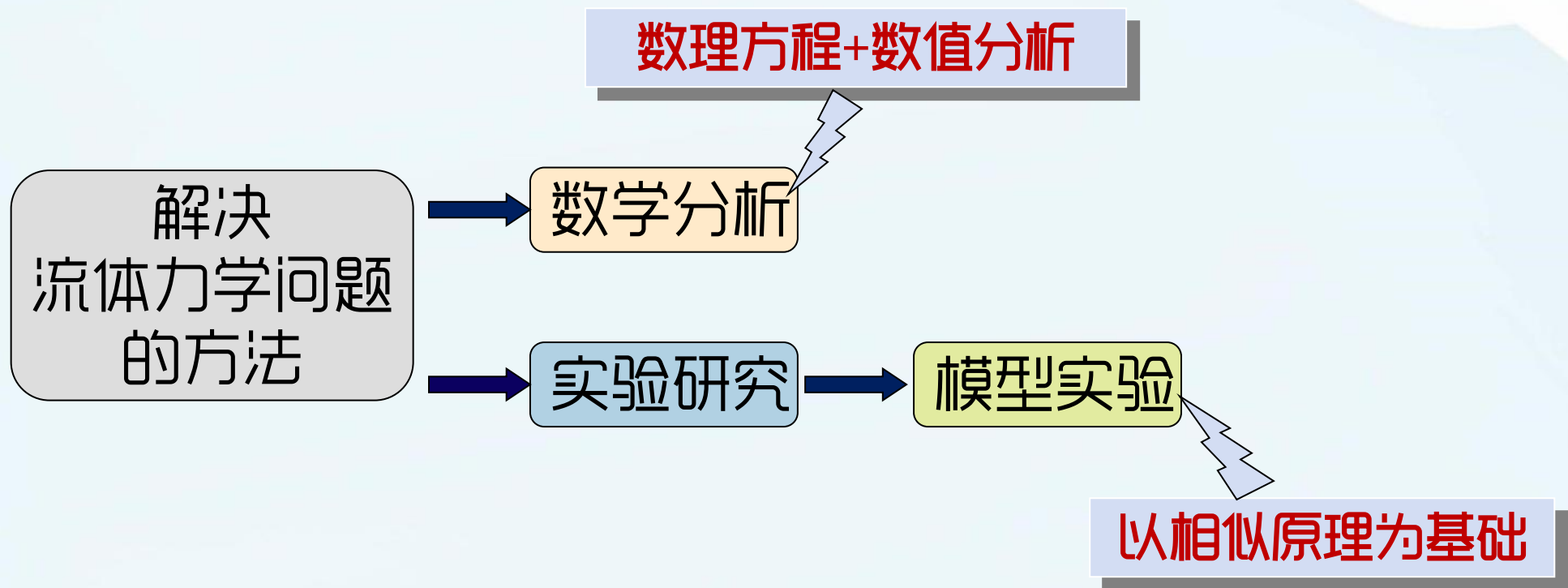


第五章 量纲分析与相似原理

5.1 量纲分析

5.2 相似原理

5.3 模型试验



对于复杂的实际工程问题，直接应用基本方程求解，在数学上极其困难，因此有赖于实验研究来解决。

5.1 量纲分析

- 量纲的基本概念
- 量纲齐次性原理
- 瑞利法和 π 定理

量纲的基本概念

量纲： 物理量的单位的种类。

物理量	单位	量纲
质量	g kg t	M
时间	s min h	T
长度	mm cm m km	L
温度	°C °F K	θ
速度	m/s km/h	[V] 或 $\dim V$

基本量纲： 彼此独立，不能相互导出。如 [L]、[M]、[T]、 $[\theta]$ 等

导出量纲： 可由基本量纲组合得到。如 $[\rho]=[ML^{-3}]$, $[V]=[LT^{-1}]$, $[a]=[LT^{-2}]$

由于不涉及电流强度、温度、热量和发光强度的变化，工程流体力学中的基本量纲由长度[L]、质量[M]、时间[T]组成。其他物理量的量纲均为这三个基本量纲的导出量纲，可用三个基本量纲的指数乘积形式表示。例如，B为任一物理量，其量纲可表示为 $[B]=[L^a M^b T^c]$

$$F=ma=m\frac{d^2l}{dt^2} \Rightarrow [F]=[MLT^{-2}], \quad p=\frac{F}{A} \Rightarrow [p]=[ML^{-1}T^{-2}]$$

量纲一量(无量纲量)：基本量纲的幂指数a、b、c均为零。

注：量纲一的量的单位是1。在表示量值时，一般不明确地写出量纲一的量的单位符号1。例如，平面角为5，写成 $\theta = 5$ ，而不写成 $\theta = 5 \times 1$ 。不过我们应记住单位符号“1”的存在。

量纲齐次原理（量纲一致性原则）

任何一个物理方程中各项的量纲必定相同，用量纲表示的物理方程必定是**齐次性的**，即是**量纲一致性原则（量纲齐次原理、因次和谐性原理）**。既然物理方程中各项的量纲相同，那么用物理方程中任何一项通除整个方程，便可将该方程化为无量纲方程。

$$\text{例: } \frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H \Rightarrow \frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}} + L + \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3} \cdot LT^{-2}} = L$$

$$\frac{v^2}{2gH} + \frac{z}{H} + \frac{p}{\rho gH} = 1 \text{ 无量纲方程}$$

量纲分析法是探索流动规律的重要方法，常用的有**瑞利法**和 **π 定理**。

瑞利法

基本思想： 假定各物理量直减是指数形式的乘积组合。

已知: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

可设: $y = kx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$

式中, k 为无量纲数, 由实验确定。

$a_1, a_2, \dots, a_n$ 为待定指数, 根据量纲一致性原则求出。

[例] 已知管流的特征流速 v 与流体的密度 ρ 、动力粘度 μ 和管径 d 有关，试用瑞利量纲分析法建立 v 的公式结构。

解： 假定 $v = k\rho^\alpha \cdot \mu^\beta \cdot d^\gamma$ 式中 k 为无量纲常数。

量纲: $[v] = LT^{-1}$, $[\rho] = ML^{-3}$, $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$, $[d] = L$

代入指数方程，则得相应的量纲方程

$$LT^{-1} = (ML^{-3})^\alpha \cdot (ML^{-1}T^{-1})^\beta \cdot L^\gamma$$

根据量纲齐次性原理得: M: $0 = \alpha + \beta$

$$L: 1 = -3\alpha - \beta + \gamma$$

$$T: -1 = -\beta$$

[例] 已知管流的特征流速 v 与流体的密度 ρ 、动力粘度 μ 和管径 d 有关，试用瑞利量纲分析法建立 v 的公式结构。

解： 解上述三元一次方程组得： $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -1$

故得：
$$v = k \frac{\mu}{\rho d}$$

其中常数 k 需由实验确定。

讨论：对速度进行无量纲化，即求 k 的表达式

$$k = \frac{\rho v d}{\mu}$$
 无量纲速度。

注意： 瑞利法一般用于变量个数不超过4时，较为方便

π 定理 (白金汉定理)

基本思想: 一个物理过程涉及到 n 个物理量,即: $F(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$

若这些变量中含有 m 个基本量纲,则原方程可转化为仅含 $n-m$ 个变量的无量纲方程: $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m})=0$

其中 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$ 是由 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 组成的无量纲量。

意义: 把描述物理现象的变量减少了 m 个, 简化物理方程

解题步骤: (1)列出物理方程, 给出所有的量纲:

(2)选量纲独立量;(一般取 ρ 、 v 、 d)

(3)对其余物理量进行无量纲化;

(4) 得到无量纲方程;

(5) 整理无量纲方程

[例]不可压缩黏性流体在管内作定常流动时，流体的压降损失 Δp 与管内径 d ，管长 l ，管壁粗糙度 ε 、流体的平均流速 V ，密度 ρ 和黏度 μ 有关，试确定压降 Δp 。

(1)列方程、给量纲;

解: 由已知得 $F(\Delta p, \mu, l, \varepsilon, d, v, \rho) = 0$

(2)选独立量;

量纲: $[\rho]=ML^{-3}$, $[d]=L$, $[v]=LT^{-1}$, $[\varepsilon]=L$

(3)无量纲化;

$[l]=L$, $[\Delta p]=MT^{-1}L^{-2}$, $[\mu]=MT^{-1}L^{-1}$

(4)无量纲方程;

(5)整理

选取 d , v , p 为量纲独立量, 对其他参数无量纲化:

$$[\Delta p] = [d]^{a_1} [v]^{b_1} [\rho]^{c_1} \Rightarrow ML^{-1}T^{-2} = L^{a_1}(LT^{-1})^{b_1}(ML^{-3})^{c_1}$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, b_1 = 2, c_1 = 1$$

$$\therefore [\Delta p] = \pi_{\Delta p} [v]^2 [\rho] \Rightarrow \pi_{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu$$

$$[\mu] = [d]^{a_2} [v]^{b_2} [\rho]^{c_2} \Rightarrow ML^{-1}T^{-1} = L^{a_2}(LT^{-1})^{b_2}(ML^{-3})^{c_2}$$

$$\Rightarrow a_2 = 1, b_2 = 1, c_2 = 1$$

$$\therefore [\mu] = \pi_{\mu} [d] [v] [\rho] \Rightarrow \pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho d v} = \frac{1}{Re}$$

同理 $\pi_l = \frac{l}{d}, \quad \pi_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{d}$

$$\pi_{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

$$\pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho d v}$$

$$\pi_l = \frac{l}{d}$$

$$\pi_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{d}$$

由 π 定理得: $f(\pi_{\Delta p}, \pi_{\mu}, \pi_l, \pi_{\varepsilon}) = 0$

$$\therefore \frac{\Delta p}{\rho v^2} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}, \frac{l}{d}\right)$$

整理得 $\Delta p = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$

令 $\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$ λ ——沿程损失系数

则: $\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v^2}{2}$

第五章 量纲分析与相似原理

5.2 相似原理

- 几何相似
- 运动相似
- 动力相似

相似概念

原型: 待研究的实物。

模型: 将原型按一定比例缩小或放大的代表物。

两流场相似: (力学相似)

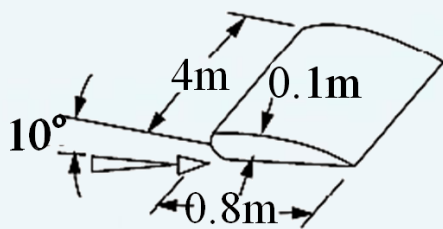
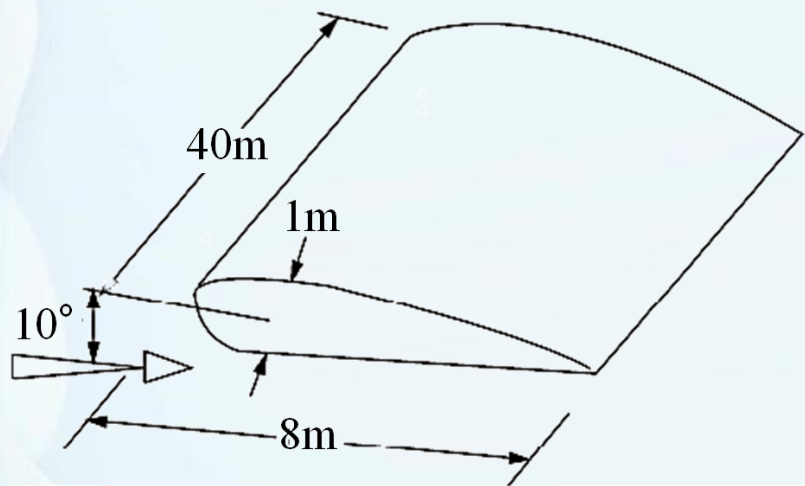
指两个流场的各对应点和各对应时刻,对应的物理量成一定的比例。

两流场相似的要求:

几何相似、运动相似、动力相似。

1. 几何相似

定义： 模型流动和实物(原型)流动的几何相似，指的是两个流场的几何形状相似，一切对应的线性尺寸成比例。



线性比例常数:

$$C_l = \frac{l'}{l} = \frac{h'}{h} = \frac{d'}{d} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \dots$$

面积比例常数:

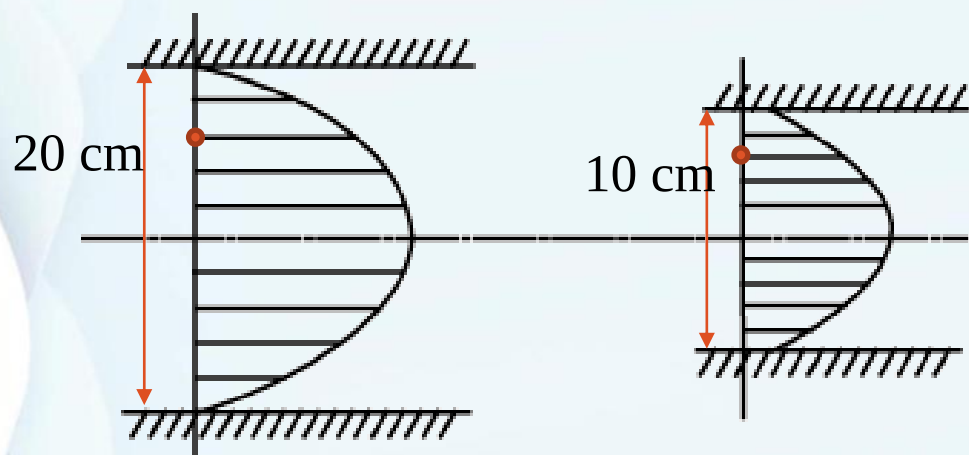
$$C_A = \frac{A'}{A} = \frac{l'^2}{l^2} = C_l^2$$

体积比例常数:

$$C_V = \frac{V'}{V} = \frac{l'^3}{l^3} = C_l^3$$

2.运动相似

定义：几何相似流场中，流场中各对应点、对应时刻上速度(加速度)的方向一致，大小成比例，即速度场（加速度场）相似。



速度比例常数: $C_v = \frac{v'}{v}$

时间比例常数: $C_t = \frac{t'}{t} = \frac{l' / v'}{l / v} = \frac{C_l}{C_v}$

加速度比例常数: $C_a = \frac{a'}{a} = \frac{v' / t'}{v / t} = \frac{C_v}{C_t} = \frac{C_v^2}{C_l}$

流量比例常数: $C_{Q_v} = \frac{Q'_v}{Q_v} = \frac{l'^3 / t'}{l^3 / t} = \frac{C_l^3}{C_t} = C_l^2 C_v$

角速度比例常数: $C_\omega = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{V' / l'}{V / l} = \frac{C_v}{C_l}$

3.动力相似

定义：两运动相似流场中，对应空间点、对应瞬时，作用在两相似几何微团上的力，方向一致、大小互成比例且均等于同一比例系数，则动力场相似。

力比例常数：

$$C_F = \frac{F'}{F} = \frac{F_p'}{F_p} = \frac{F_\mu'}{F_\mu} = \dots = \frac{F_g'}{F_g}$$

又由牛顿定律可知：

$$C_F = \frac{\rho' \Delta l'^3 \frac{\Delta v'}{\Delta t'}}{\rho \Delta l^3 \frac{\Delta v}{\Delta t}} = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

其中：

$$C_\rho = \frac{\rho'}{\rho} \quad \text{为流体的密度比例常数。}$$

力矩比例常数: $C_M = \frac{M'}{M} = \frac{F' l'}{F l} = C_F C_l = C_l^3 C_v^2 C_\rho$

压强比例常数: $C_p = \frac{p'}{p} = \frac{F_p' / A'}{F_p / A} = \frac{C_F}{C_A} = C_v^2 C_\rho$

动力粘度比例常数: $C_\mu = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho' v'}{\rho v} = C_\rho C_v = C_l C_v C_\rho$

有了模型与原型的**密度比例常数**，**长度比例常数**和**速度比例常数**，
就可由它们确定所有动力学量的比例常数。

相似准则

定义:在几何相似的条件下, 两种物理现象保证相似的条件或准则。

$$\begin{aligned} \text{由 } C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2 \quad \text{可得} \quad \frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} &= 1 \\ \text{或} \quad \frac{F'}{\rho' l'^2 v'^2} &= \frac{F}{\rho l^2 v^2} \end{aligned}$$

作用在流体质点上的力:

惯性力、粘性力、压力、重力、弹性力、表面张力....

动力相似准则

将各种力的公式带入得:

惯性力/重力

重力相似准则 (弗劳德准则)

惯性力/粘性力

粘性力相似准则 (雷诺准则)

惯性力/压力

压力相似准则 (欧拉准则)

惯性力/惯性力

非定常性相似准则 (斯特劳哈尔准则)

惯性力/弹性力

弹性力相似准则 (马赫准则)

惯性力/表面张力

表面张力相似准则 (韦伯准则)

重力相似准则

将重力比 $C_F = \frac{W'}{W} = \frac{\rho' V' g'}{\rho V g} = C_\rho C_l^3 C_g$ 带入 $\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} = 1$ 得:

$$\frac{C_v}{(C_l C_g)^{1/2}} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{v'}{(g' l')^{1/2}} = \frac{v}{(g l)^{1/2}} \quad \text{令} \quad \frac{v}{(g l)^{1/2}} = Fr$$

Fr 称为弗劳德数，它是惯性力与重力的比值。当模型与原型重力相似，则其弗劳德数必定相等，即 $Fr' = Fr$ ；反之亦然。这就是重力相似准则（弗劳德准则）。

重力场中 $g' = g$, $C_g = 1$, 则: $C_v = C_l^{1/2}$

应用：有自由液面的流动。如：堰流；明渠流动；闸下出流；波浪运动；兴波阻力。

粘性力相似准则

将粘性力比 $C_F = \frac{F'_\mu}{F_\mu} = \frac{\mu (dv'_x/dy') A'}{\mu (dv_x/dy) A} = C_\mu C_l C_v$ 带入 $\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} = 1$ 得:

$$\begin{aligned} C_\rho C_v C_l / C_\mu &= 1 & C_v C_l / C_v &= 1 \\ \text{或 } \frac{\rho' v' l'}{\mu'} &= \frac{\rho v l}{\mu} & \frac{v' l'}{v'} &= \frac{v l}{v} & \Leftrightarrow \frac{\rho v l}{\mu} &= \frac{v l}{v} = Re \end{aligned}$$

Re 称为雷诺数, 它是惯性力与粘性力的比值。当模型与原型的粘性力相似, 则其雷诺数必定相等, 即 $Re' = Re$; 反之亦然。这就是粘性力相似准则 (雷诺准则)。

模型与原型用同一种流体时, $C_\rho = C_\mu$, 则: $C_v = 1/C_l$

应用: 管道内有压流动; 绕流问题。

压力相似准则

将压力比 $C_F = \frac{F'}{F} = \frac{p' A'}{p A} = C_p C_l^2$ 代入 $\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} = 1$ 得: $\frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = 1$

或 $\frac{p'}{\rho' v'^2} = \frac{p}{\rho v^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{\rho v^2} = Eu$

Eu 称为欧拉数，它是总压力与惯性力的比值。当模型与原型的压力相似，则其欧拉数必定相等，即 $Eu' = Eu$ ；反之亦然。这就是压力相似准则（欧拉准则）。

当压强用压差代替，欧拉数: $Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$ 欧拉相似准则: $\frac{\Delta p'}{\rho' v'^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$

应用：空泡现象，空泡阻力。

非定常性相似准则

将由**当地加速度引起**的惯性力之比 $C_F = \frac{F'_{It}}{F_{It}} = \frac{\rho' V' (\partial v'_x / \partial t')}{\rho V (\partial v_x / \partial t)} = C_\rho C_l^3 C_v C_t^{-1}$

带入 $\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} = 1$ 得: $\frac{C_l}{C_v C_t} = 1$

或: $\frac{l'}{v' t'} = \frac{l}{vt}$ 令: $\frac{l}{vt} = St$

St 称为斯特劳哈尔数，它是当地惯性力与迁移惯性力的比值。当模型与原型
的非定常流动相似，则其斯特劳哈尔数必定相等，即 $St' = St$ ；反之亦然。这就
是非定常相似准则（斯特劳哈尔准则）。

弹性力相似准则

马赫数: $Ma = \frac{v}{c}$ 其中, c 为声速

Ma 的物理意义: 表征惯性力和粘性力之比。

表面张力相似准则

韦伯数: $We = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$ 其中: σ 为表面张力系数

We 的物理意义: 表征惯性力和表面张力之比。

如果已经有了某流动的运动微分方程, 可由该方程直接导出有关的相似准则和相似准则数, 方法是令方程中的有关力与惯性力相比。

流动相似条件

流动相似：在对应点上、对应瞬时，所有物理量都成比例。

相似流动必然满足以下条件：

- 1.任何相似的流动都是属于同一类流动，相似流场对应点上的各种物理量，都应为相同的微分方程所描述；
- 2.相似流场对应点上的各种物理量都有唯一确定的解，即流动满足**单值条件**相似；
- 3.由单值条件中的物理量所确定的相似准则数相等是流动相似必须满足的条件。

单值条件

- (1) 几何条件。形状、尺寸等
- (2) 物理条件。密度、粘度等
- (3) 边界条件。入口、壁面等
- (4) 初始条件。速度、温度等

凡属同一类流动，当单值条件相似而且由单值条件中的物理量所组成的相似准则数相等时，这些流动必定相似。

第五章 量纲分析与相似原理

5.3 模型试验

- 全面力学相似模型试
- 近似模化法模型试验

全面力学相似模型试验

全面力学相似：满足几何相似、运动相似和动力相似，且具有相似的初始和边界条件。即所有的相似准则数必须相等。

但是，要做到流动完全相似在实际的流动试验中是很难实现的。比如，对于在重力场中的不可压缩黏性流体定常流动，有两个定性准则，即必须满足雷诺准则和弗劳德准则。

若满足雷诺准则 $Re = Re'$, $\frac{Vl}{\nu} = \frac{V'l'}{\nu'}$ 或 $\frac{v'}{v} = \frac{l}{l'} \frac{v'}{v} \Rightarrow C_{V1} = \frac{C_v}{C_l}$

若满足弗劳德准则 $Fr = Fr'$, $\frac{gl}{V^2} = \frac{g'l'}{V'^2}$ 或 $C_{V2}^2 = C_l C_g \Rightarrow C_{V2} = \sqrt{C_l C_g}$

在重力场中做试验, $g=g'$, 即 $C_g=1$ 则有: $C_{v1}=C_v/C_1$, $C_{v2}=\sqrt{C_1}$

当选用相同的流动介质, 即 $v'=v$, $C_v=1$, $C_{v1}=C_1^{-1}$, $C_{v2}=\sqrt{C_1}$

若取 $C_1=\frac{1}{10}$ 时, $C_{v1}=10$, $C_{v2}=\frac{1}{3.16}$ 。这就使得二者发生矛盾, 故不能选用同种介质。

当令 $C_{v1}=C_{v2}$ 时, $C_v/C_1=\sqrt{C_1}$, 得 $C_v=(C_1)^{3/2}$,

若 $C_1=\frac{1}{10}$, 则 $C_v=\frac{1}{31.6}$ 。这表示为保证 $Re'=Re$, $Fr'=Fr$, 就要使模型中介质的运动黏度为原型中介质运动黏度的 $\frac{1}{31.6}$, 这几乎无法实现。

近似模化法模型试验

在设计模型和组织模型试验时，在与流动过程有关的定性准则中只考虑那些对流动过程起主导作用的定性准则，而忽略那些对过程影响较小的定性准则，以达到模型流动与原型流动的近似相似。

近似模化法模型试验有以下几种

- (1) 弗劳德模化法
- (2) 雷诺模化法
- (3) 欧拉模化法
- (4) 马赫模化法
- (5) 斯特劳哈尔模化法

近似模化法

(1) 弗劳德模化法

在有**自由面**的流动现象中，**重力起主导作用**，粘性力不起显著作用，重力相似准则数（Fr数）就是相似准则。

采用弗劳德相似准则进行模型设计。

$$Fr = Fr', \text{ 即 } \frac{V^2}{gl} = \frac{V'^2}{g'l'}, \text{ 因为 } g = g', \text{ 于是 } \frac{V^2}{l} = \frac{V'^2}{l'} \quad \text{或} \quad C_V = C_l^{\frac{1}{2}}$$

应用在船舶运动、水利工程和无压明渠流动的模化试验中。

(2) 雷诺模化法

实际流体在管内流动，**粘性力决定**流体流动的阻力损失，形成压降，雷诺数是主要相似准则。

采用雷诺相似准则进行模型设计。

$$Re = Re', \text{ 即 } \frac{Vl}{\nu} = \frac{Vl'}{\nu'} \text{ 或 } C_V = \frac{C_{\nu}}{C_l}$$

应用在管内流动、液压技术、流体机械的模化试验中。

(3) 欧拉模化法

当雷诺数大于某一定值时流体的速度分布彼此相似，与雷诺数不再相关，流体的流动进入**自模化区**内，**惯性力起主要作用**，黏性力的影响减弱。此时尽管雷诺数不同，但黏性效果一样。雷诺数处在自模化区内，雷诺准则失去判别相似的作用。此时，应采用欧拉相似准则进行模型设计。

$$Eu = Eu' \quad \text{或} \quad \frac{p}{\rho V^2} = \frac{p'}{\rho' V'^2} \quad \text{或} \quad C_p = C_v^2 C_\rho$$

应用在自模化区的管内流动，如风洞实验、气体绕流。

(4) 马赫模化法

对于大多数的可压缩流体流动，Re太大，以致于Re不再是决定性参数。流体的压缩性促使马赫数成为模型研究的基本相似准则，于是使实物和模型流动的Ma数相等。

$$Ma = Ma' \text{ 或 } \frac{V}{a} = \frac{V'}{a'} \text{ 或 } \frac{V}{\sqrt{kRT}} = \frac{V'}{\sqrt{kRT'}} \text{ 或 } C_v = C_a$$

模型研究在风洞中进行，流体介质为空气，当两种流动的温度保持不变时，假定 $a' = a$ ，这样模型研究中的流体速度就等于原型研究中的流体速度。

(5) 斯特劳哈尔模化法

当流体流经圆柱形物体如桥梁、电视塔、电缆、高大建筑等，或者流体流经风力机涡轮机时，流场内会出现流体周期性运动情况。在研究这些流动时必须考虑斯特劳哈尔数，即采用斯特劳哈尔相似准则进行模型设计。

$$Sr = Sr' \text{ 或 } \frac{V}{\omega l} = \frac{V'}{\omega' l'} \text{ 或 } C_V = C_l C_\omega$$

斯特劳哈尔准则的应用可以保证流体周期性流动被准确地模化出来。